

Математическое моделирование напряженного состояния в шахтной перемычке, установленной в выработке круглого поперечного сечения*

DOI: <http://dx.doi.org/10.18796/0041-5790-2023-2-34-40>

ЧЕРДАНЦЕВ С.В.

Доктор техн. наук,
главный научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ»,
650002, г. Кемерово, Россия,
e-mail: svch01@yandex.ru

ЕРАСТОВ А.Ю.

Старший научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ»,
650002, г. Кемерово, Россия,
e-mail: eractov_a_y@mail.ru

С целью предотвращения распространения теплофизических и газодинамических процессов в рудничной атмосфере угольных предприятий используются шахтные перемычки. К настоящему времени существует большое разнообразие конструкций шахтных перемычек и технологических схем их возведения. Вместе с тем имеющиеся методики расчета перемычек, на наш взгляд, не отвечают современным требованиям по обеспечению надежности шахтных перемычек. В данной статье предпринята попытка расчета шахтных перемычек на базе фундаментальных положений механики твердого деформируемого тела. В частности, рассматривается осесимметричная краевая задача теории упругости, в ходе решения которой получены формулы для определения компонентов напряженного состояния в шахтной бетонной перемычке, построены графики компонентов напряжений и выявлены некоторые закономерности их распределения в перемычке.

Ключевые слова: горные выработки, шахтные перемычки, компоненты напряженного состояния, обобщенный закон Гука, осесимметричная задача теории упругости, гиперболические функции и функции Бесселя.

Для цитирования: Черданцев С.В., Ерастов А.Ю. Математическое моделирование напряженного состояния в шахтной перемычке, установленной в выработке круглого поперечного сечения // Уголь. 2023. № 2. С. 34-40. DOI: 10.18796/0041-5790-2023-2-34-40.

ВВЕДЕНИЕ

Согласно нормативным требованиям эксплуатации угольных шахт при отработке пластов, склонных к самовозгоранию [1, 2], проявлению газодинамических [3, 4] и детонационных процессов [5, 6, 7], необходимо проводить изоляцию выработанных пространств от действующих горных выработок. Процесс изоляции, как правило, осуществляется возведением шахтных перемычек [1].



* Исследование выполнено в рамках комплексной научно-технической программы полного инновационного цикла «Разработка и внедрение комплекса технологий в областях разведки и добычи полезных ископаемых, обеспечения промышленной безопасности, биоремедиации, создания новых продуктов глубокой переработки из угольного сырья при последовательном снижении экологической нагрузки на окружающую среду и рисков для жизни населения», утвержденной Распоряжением Правительства Российской Федерации от 11.05.2022 №1144-р.

Конструкции и технологии возведения шахтных перемычек следует выбирать, главным образом, на основе их прочностного расчета, хотя при этом учитываются также горно-геологические и горнотехнические условия в местах возведения перемычек.

К настоящему времени разработаны различные типы и конструкции перемычек [8], а также технологические схемы их возведения. Однако в действующей нормативной документации пока отсутствует методика выполнения расчетов, обосновывающая технические решения по выбору параметров шахтных перемычек. В связи со сказанным в данной статье предпринята попытка построить расчетную модель перемычки (рис. 1) в рамках следующих допущений:

- 1) рассматривается горная выработка круглого очертания, в которой жестко установлена бетонная перемычка, имеющая форму круглого цилиндра радиуса R ;
- 2) перемычка изготовлена из монолитного бетона, являющегося упругим телом;
- 3) предполагается, что давление на фронте ударной волны распределено равномерно по торцевому сечению перемычки, в связи с чем деформирование перемычки происходит симметрично относительно ее оси.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ШАХТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЕРЕМОЧКИ

Поскольку шахтная перемычка имеет форму кругового цилиндра, то для получения исходных уравнений будем использовать цилиндрическую систему координат (рис. 2).

В статье рассматривается следующая задача. В рудничной атмосфере произошел взрыв пылегазовоздушной смеси, в результате чего образовалась ударная волна. Для предотвращения ее распространения установлена перемычка толщиной δ (см. рис. 2). Требуется определить компоненты напряженного состояния в перемычке, если давление p_y на фронте ударной волны нам известно.

В силу третьего допущения о симметричности деформации ее компоненты $\varepsilon_{rr}, \dots, \varepsilon_{zz}$ в цилиндрической системе координат и угол поворота ω_θ определяются по формулам [9]:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \omega_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где u_r, u_θ, u_z – компоненты вектора перемещения произвольного элемента перемычки.

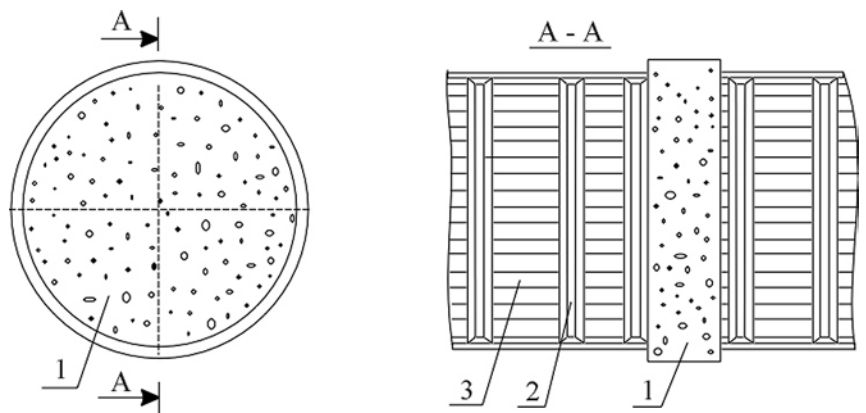


Рис. 1. Схема бетонной шахтной перемычки в горной выработке круглого поперечного сечения: 1 – перемычка, 2 – металлическая крепь из спецпрофиля, 3 – затяжки

Fig. 1. Scheme of a concrete shaft bridge in a mining of circular cross-section: 1 – a bridge, 2 – metal fasteners from a special profile, 3 – tightening

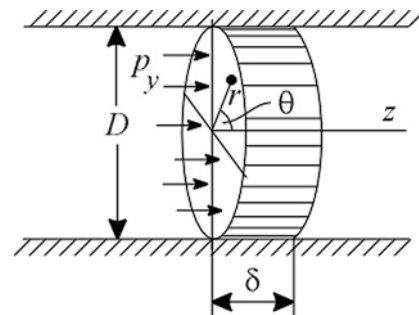


Рис. 2. Расчетная схема шахтной перемычки

Fig. 2. Design scheme of the shaft jumper

Исключив из формул (1) компоненты u_r, u_θ, u_z , найдем производные:

$$\frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial r}, \quad \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r}, \quad (2)$$

и воспользуемся уравнениями равновесия малого элемента перемычки в цилиндрических координатах r, θ, z , которые представляются в виде [9]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} = 0. \quad (3)$$

Согласно второму допущению об упругости материала перемычки имеют место соотношения закона Гука между напряжениями и деформациями [9, 10]:

$$\sigma_{rr} = \lambda \Theta + 2G \varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \Theta + 2G \varepsilon_{\theta\theta},$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \Theta + 2G \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{rz} = 2G \varepsilon_{rz}, \quad (4)$$

где Θ – объемная деформация, определяемая как:

$$\Theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} =$$

$$= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (5)$$

а параметры Ламе λ, G , модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ связаны зависимостями:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

С помощью формул (4), (2) преобразуем уравнения (3) к системе [11]:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2G) \frac{\partial \Theta}{\partial r} + 2G \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} &= 0, \\ (\lambda + 2G) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{2G}{r} \frac{\partial(r\omega_\theta)}{\partial r} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

для которой сформулируем краевую задачу, исходя из следующих рассуждений. Поскольку перемычка находится в равновесии, то ее контур, непосредственно примыкающий к поверхности выработки, не перемещается по всей длине перемычки, а давление ударной волны p_y уравновешено нормальными напряжениями в торцевом сечении перемычки ($z = 0$). На противоположном же ее торце ($z = \delta$) нормальные напряжения отсутствуют, и поэтому граничные условия:

$$u_z|_{r=R, z=0} = 0, \quad u_z|_{r=R, z=\delta} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = p_y, \quad \sigma_{zz}|_{z=\delta} = 0, \quad (7)$$

в совокупности с системой уравнений (6) образуют краевую задачу о взаимодействии цилиндрической перемычки с ударной волной.

Решение краевой задачи построим с помощью функций напряжений $\varphi(r; z)$, $\Phi(r; z)$, с которыми свяжем объемную деформацию Θ , угол поворота ω_θ [10]:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{2(1-\mu)}{\lambda + 2G} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1-2\mu}{G} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \\ \omega_\theta &= \frac{1-\mu}{G} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (8)$$

а также компоненты напряжений σ_{zz} и σ_{rz} :

$$\sigma_{zz} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \sigma_{rz} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (9)$$

Подставив соотношения (8) в первое уравнение (6), приходим к уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad (10)$$

представляющему собой уравнение Лапласа в цилиндрических координатах.

Выразим далее остальные компоненты деформаций и напряжений через функции напряжений $\varphi(r; z)$, $\Phi(r; z)$. Для этой цели вначале сопоставим вторую формулу (1) и вторую формулу (9), выразив в ней с помощью последней формулы (4) напряжение σ_{rz} через деформацию ε_{rz} :

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (11)$$

Затем, сопоставив четвертую формулу (1) и вторую формулу (8), получим равенство:

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = 2 \frac{1-\mu}{G} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (12)$$

Складывая вначале равенства (11) и (12), а затем вычитая их, получим соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial z} &= \frac{1}{2G} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} [\Phi + 2(1-\mu)\varphi], \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{1}{2G} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} [\Phi - 2(1-\mu)\varphi]. \end{aligned} \quad (13)$$

Обратим внимание, что первое равенство (13) может быть проинтегрировано, в результате чего получим связь между перемещением u_r и функциями Φ , φ :

$$u_r = \frac{1}{2G} \cdot \frac{1}{r} [\Phi + 2(1-\mu)\varphi]. \quad (14)$$

Учитывая в первой формуле (8) соотношения (5) и (14), выразим производную $\partial u_z / \partial z$ через функции Φ и φ и после преобразований получаем формулу:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{2G} \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (15)$$

интегрируя которую, находим:

$$u_z = -\frac{1}{2G} \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) z. \quad (16)$$

Исходя из теоремы Шварца [12] следует равенство:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right),$$

подставляя в которое формулы (13) и (15), получаем равенство:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (17)$$

которое устанавливает связь между функциями Φ и φ . Оно будет выполнено, если задать функцию Φ в одной из следующих форм:

$$\Phi = \psi + z \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \Phi = \psi - r \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (18)$$

в чем можно убедиться, подставив формулу (18) в (17), в результате чего мы приходим к уравнению Лапласа для функции ψ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0. \quad (19)$$

Далее подставим в (14) первую и третью формулы (1), выразив тем самым компоненты деформации через функции напряжений:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2G} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\Phi + 2(1-\mu)\varphi}{r} \right], \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2G} \cdot \frac{\Phi + 2(1-\mu)\varphi}{r^2}.$$

Учитывая полученные формулы вместе с первой формулой (8) в соотношениях закона Гука (4), после преобразований получим остальные компоненты напряжений, выраженные через функции напряжений:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Omega, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{2(1+\mu)}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \Omega, \quad (20)$$

где обозначено:

$$\Omega = \frac{\Phi + 2(1-\mu)\varphi}{r^2} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r}. \quad (21)$$

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Следуя методу Фурье [12], построим решение уравнения (10), разделив в нем переменные, для чего представим искомую функцию в виде произведения двух функций, одна из которых $R(r)$ зависит только от координаты r , а другая $Z(z)$ – только от z :

$$\varphi(r; z) = R(r)Z(z). \quad (22)$$

Подставив формулу (22) в уравнение (10) и выполнив в нем преобразования, приходим к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{dR(r)}{dr} + \lambda^2 R(r) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \lambda^2 Z(z) = 0, \quad (24)$$

где λ – некоторая постоянная величина, подлежащая определению.

Решением уравнения (23) является функция:

$$R = C \cdot r J_1(\rho) + D \cdot r Y_1(\rho), \quad (25)$$

содержащая функции Бесселя первого порядка соответственно первого $J_1(\rho)$ и второго рода $Y_1(\rho)$, а решением уравнения (24) является функция:

$$Z = A \operatorname{sh}(\zeta) + B \operatorname{ch}(\zeta), \quad (26)$$

содержащая гиперболические функции $\operatorname{sh}(\zeta)$, $\operatorname{ch}(\zeta)$. Входящие в (25), (26) величины A, B, C, D являются постоянными интегрирования, а величины ρ и ζ определены как:

$$\rho = \lambda \cdot r, \quad \zeta = \lambda \cdot z. \quad (27)$$

Подставляя формулы (25) и (26) в формулу (22), имеем:

$$\varphi(\zeta, \rho) = Z(\zeta) [C \cdot J_1(\rho) + D \cdot Y_1(\rho)] \cdot r. \quad (28)$$

Поскольку функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям (10) и (19), структура которых одинакова, то функцию ψ можно представить по аналогии с формулой (28):

$$\psi(\zeta, \rho) = Z_1(\zeta) [C_1 J_1(\rho) + D_1 Y_1(\rho)] \cdot r, \quad (29)$$

где $Z_1(\zeta) = A_1 \operatorname{sh}(\zeta) + B_1 \operatorname{ch}(\zeta). \quad (30)$

Учитывая соотношения, связывающие функции Бесселя с их производными [12]:

$$\frac{d}{dx} x^n J_n(x) = x^n J_{n-1}(x), \quad \frac{d}{dx} x^n Y_n(x) = x^n Y_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} x^{-n} J_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x), \quad \frac{d}{dx} x^{-n} Y_n(x) = -x^{-n} Y_{n+1}(x),$$

$$\Phi = \psi + z \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \Phi = \psi - r \frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

в формулах (18) и (21), получим выражения для функций $\Phi(\zeta, \rho)$ и $\Omega(\zeta, \rho)$:

$$\Phi(\zeta, \rho) = \{ [C_1 Z_1(\zeta) + C \cdot \zeta \cdot Z'(\zeta)] J_1(\rho) + [D_1 Z_1(\zeta) + D \cdot \zeta \cdot Z'(\zeta)] Y_1(\rho) \} r, \quad (31)$$

$$\Omega(\zeta, \rho) = \frac{1}{r} \{ [C_1 Z_1(\zeta) + C \cdot \zeta \cdot Z'(\zeta) + 2(1-\mu)C \cdot Z(\zeta)] J_1(\rho) + [D_1 Z_1(\rho) + D \cdot \zeta \cdot Z'(\zeta) + 2(1-\mu)DZ(\zeta)] Y_1(\rho) - 2 \cdot \rho \cdot Z(\zeta) [CJ_0(\rho) + DY_0(\rho)] \}, \quad (32)$$

где штрихами обозначена операция дифференцирования по координате ζ :

$$Z'_1(\zeta) = A_1 \operatorname{ch}(\zeta) + B_1 \operatorname{sh}(\zeta). \quad (33)$$

Подставив выражения (31) и (32) в формулы (9), (14), (16), (20) и (21) и выполнив преобразования, получим формулы для определения напряжений и перемещений, выраженные через функции Бесселя и гиперболические функции:

$$\sigma_{rr}(\zeta, \rho) = -\frac{1}{r} \{ [C_1 Z_1(\zeta) + C \zeta Z'(\zeta) + 2(1-\mu)CZ(\zeta)] J_1(\rho) + [D_1 Z_1(\zeta) + D \zeta Z'(\zeta) + 2(1-\mu) \times \times DZ(\zeta)] Y_1(\rho) - \rho [C_1 Z_1(\zeta) + C \zeta Z'(\zeta) + 2CZ(\zeta)] J_0(\rho) - -\rho [D_1 Z_1(\zeta) + D \zeta Z'(\zeta)] Y_0(\rho) \}, \quad (34)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(\zeta, \rho) = \frac{1}{r} \{ [C_1 Z_1(\zeta) + C \zeta Z'(\zeta) + 2(1-\mu)CZ(\zeta)] J_1(\rho) + [D_1 Z_1(\zeta) + D \zeta Z'(\zeta) + 2(1-\mu)DZ(\zeta)] Y_1(\rho) + 2\mu\rho Z(\zeta) [CJ_0(\rho) + DY_0(\rho)] \}, \quad (35)$$

$$\sigma_{zz}(\zeta, \rho) = -\lambda \{ [C_1 Z_1(\zeta) + C \zeta Z'(\zeta)] J_0(\rho) + [D_1 Z_1(\zeta) + D \zeta Z'(\zeta)] Y_0(\rho) \}, \quad (36)$$

$$\tau_{rz}(\zeta, \rho) = \lambda \{ [C_1 Z'_1(\zeta) + CZ'(\zeta) + C \zeta Z(\zeta)] J_1(\rho) + [D_1 Z'_1(\zeta) + DZ'(\zeta) + D \zeta Z(\zeta)] Y_1(\rho) \}. \quad (37)$$

$$u_r(\zeta, \rho) = \frac{1}{2G} \{ [C_1 Z_1(\zeta) + C \zeta Z'(\zeta) + 2(1-\mu)CZ(\zeta)] J_1(\rho) + [D_1 Z_1(\zeta) + D \zeta Z'(\zeta) + 2(1-\mu)DZ(\zeta)] Y_1(\rho) \}, \quad (38)$$

$$u_z(\zeta, \rho) = -\frac{1}{2G} \{ [C_1 Z'_1(\zeta) + C \zeta Z(\zeta) - (1-2\mu)CZ'(\zeta)] J_0(\rho) + [D_1 Z'_1(\zeta) + D \zeta Z(\zeta) - (1-2\mu)DZ'(\zeta)] Y_0(\rho) \}. \quad (39)$$

Анализируя формулы (34) – (39), замечаем, что все искомые величины содержат функции Бесселя $Y_0(\rho)$, $Y_1(\rho)$, которые при $\rho \rightarrow 0$ стремятся к бесконечности. Следовательно, все величины в этих формулах не определены в точке $\rho = 0$ и в ее окрестности. Чтобы исключить эту неопределенность, необходимо исключить функции $Y_0(\rho)$, $Y_1(\rho)$, для чего в формулах (34) – (39) примем постоянные:

$$D = D_1 = 0. \quad (40)$$

Для определения параметра λ и постоянных интегрирования C, C_1 воспользуемся граничными условиями (7). Вначале в первое и второе условия (7) подставим формулу (39). В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 Z_1'(0) - (1 - 2\mu)CZ'(0) = 0, \\ C_1 Z_1'(\Lambda) + C \cdot [\Lambda \cdot Z(\Lambda) - (1 - 2\mu)Z'(\Lambda)] = 0, \end{cases} \quad (41)$$

где обозначено $\Lambda = \lambda\delta$. (42)

Система уравнений (41) имеет нетривиальное решение только в том случае, если ее определитель, составленный из коэффициентов при C, C_1 , равен нулю [13]:

$$\begin{vmatrix} Z_1'(0) & -(1 - 2\mu)Z'(0) \\ Z_1'(\Lambda) & [\Lambda \cdot Z(\Lambda) - (1 - 2\mu)Z'(\Lambda)] \end{vmatrix} = 0,$$

откуда мы приходим к трансцендентному уравнению:

$$Z(\Lambda) = 0, \quad (43)$$

которое в соответствии с формулой (26) приобретает вид:

$$\text{sh}(\Lambda) + \frac{B}{A} \text{ch}(\Lambda) = 0 \quad (44)$$

относительно неизвестного параметра Λ .

Особенность уравнения (44) состоит в том, что наличие или отсутствие искомых корней Λ , а также их значения зависят от соотношения B/A . На рис. 3 представлены графики функции $Z(\Lambda)$, построенные при соотношениях соответственно $B/A = 0,25; 0,5; 0,75$.

Точки пересечения графиков с осью абсцисс доставляют нам значения корней уравнения (44). Более точные значения корней уравнения (44) найдены с помощью программного пакета MathCAD [14]. При указанных значениях B/A корни характеристического уравнения (44) соответственно равны $\Lambda_1 = 0,255; \Lambda_2 = 0,549; \Lambda_3 = 0,973$.

Если, например, толщина перемычки составляет $\delta = 2$ м, то с помощью формулы (42) мы можем вычислить значение параметра λ . В частности, найденным корням $\Lambda_1; \Lambda_2; \Lambda_3$ соответствуют значения $\lambda_1 = 0,128 \text{ м}^{-1}; \lambda_2 = 0,275 \text{ м}^{-1}; \lambda_3 = 0,486 \text{ м}^{-1}$.

Далее подставим формулу (36) в третье и четвертое граничные условия (7). В результате мы получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda[C_1 Z_1(0) + C \cdot 0 \cdot Z'(0)]J_0(\rho) = p_y, \\ C_1 Z_1(\Lambda) + C \cdot \Lambda \cdot Z'(\Lambda) = 0, \end{cases}$$

из которой определяем постоянные интегрирования:

$$C_1 = -\frac{p_y}{\lambda \cdot Z_1(0) \cdot J_0(\rho)}, \quad C = -C_1 \cdot \frac{Z_1(\Lambda)}{\Lambda \cdot Z'(\Lambda)}. \quad (45)$$

Обратим внимание, что соотношение B_1/A_1 нам неизвестно, в связи с чем функция $Z_1(\zeta)$ не определена, и поэтому не представляется возможным вычислить значение $Z_1(\Lambda)$ и, следовательно, определить постоянную C во второй формуле (45).

Чтобы преодолеть данную неопределенность, учтем, что касательные напряжения τ_{rz} на свободном торце перемычки равны нулю:

$$\tau_{rz}(\zeta, \rho)|_{z=\delta} = 0,$$

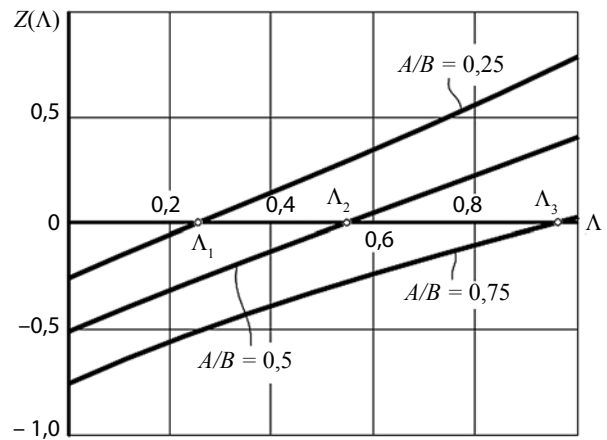


Рис. 3. К решению трансцендентного уравнения графическим методом

Fig. 3. To solve the transcendental equation by the graphical method

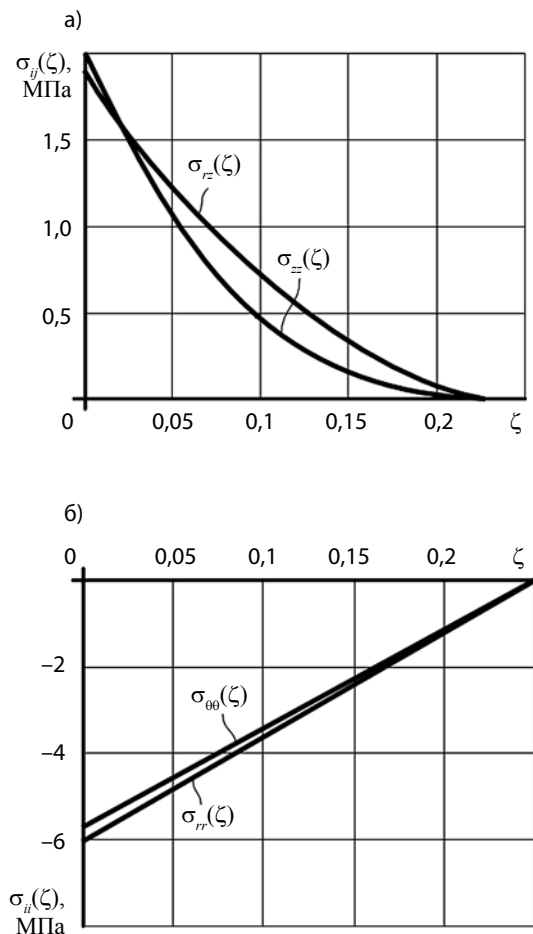


Рис. 4. Графики зависимостей напряжений σ_{zz}, σ_{rz} (а) и $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ (б) от координаты ζ

Fig. 4. Graphs of voltage dependences σ_{zz}, σ_{rz} (a) and $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ (b) on the coordinate ζ

что приводит нас к уравнению:

$$C_1 Z_1'(\Lambda) + C[Z'(\Lambda) + \Lambda \cdot Z(\Lambda)] = 0,$$

из которого, с учетом уравнения (43), получаем формулу:

$$C = -C_1 \frac{Z_1'(\Lambda)}{Z'(\Lambda)}. \quad (46)$$

Из сопоставления формул (45) и (46) находим искомое соотношение

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\text{sh}(\Lambda) - \Lambda \cdot \text{ch}(\Lambda)}{\Lambda \cdot \text{sh}(\Lambda) - \text{ch}(\Lambda)'} \quad (47)$$

после чего определяем по формулам (30), (33) функцию $Z_1(\zeta)$ и ее производную $Z_1'(\zeta)$, а затем постоянные интегрирования C , C_1 .

Подставляя найденные постоянные интегрирования C и C_1 в формулы (34) – (37), мы можем вычислить значения напряжений в любой точке перемычки и построить их графики (рис. 4), построенные при $\lambda_1 = 0,128 \text{ м}^{-1}$.

Обратим внимание, что при подстановке выражений (40) и (45) в формулу (36) функция $\sigma_z(\zeta)$ приобретает вид, не зависящий от координаты r :

$$\sigma_{zz}(\zeta) = \left(Z_1(\zeta) - \frac{Z_1(\Lambda)}{\Lambda \cdot Z'(\Lambda)} \zeta Z_1'(\zeta) \right) \frac{P_y}{Z_1(0)}. \quad (48)$$

Так, на рис. 4 а представлены графики $\sigma_{zz}(\zeta)$ и $\sigma_{rz}(\zeta)$, построенные соответственно по формулам (48) и (37) при $r = R$. Оба графика представляют собой вогнутые кривые, монотонно уменьшающиеся до нуля при $\zeta = \Lambda$ (см. рис. 4 а).

Графики же напряжений $\sigma_{rr}(\zeta)$, $\sigma_{\theta\theta}(\zeta)$ представляют собой практически прямые линии, хотя функции $\sigma_{rr}(\zeta)$, $\sigma_{\theta\theta}(\zeta)$ согласно формулам (34), (35) являются нелинейными. Отметим, что наибольшее значение напряжения σ_{rr} в нагруженном торцевом сечении составляет 6 МПа, что в три раза больше давления на фронте ударной волны.

Особо отметим, что в условиях рассматриваемого закрепления перемычки в ее торцевом сечении ($\zeta = \Lambda$), свободном от воздействия ударной волны, все компоненты напряженного состояния равны нулю.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Получены формулы для определения компонентов осесимметричного напряженного состояния в шахтной бетонной перемычке и построены их графики.
- Из выполненного анализ графиков следует:
 - касательные и осевые нормальные напряжения монотонно убывают от максимальных значений в торцевом сечении перемычки, воспринимающей ударную волну, до нуля на противоположном торце перемычки. При этом графики представляют собой вогнутые кривые, не имеющие экстремальных точек;

– нормальные радиальные и окружные напряжения монотонно уменьшаются вдоль длины перемычки, а их графики представляют собой практически прямые линии, хотя сами напряжения являются нелинейными функциями, содержащими функции Бесселя и гиперболические функции. Наибольшие нормальные радиальные и окружные напряжения в несколько раз превышают давление на фронте ударной волны.

Список литературы

1. Линденау Н.И., Маевская В.М., Крылов В.Ф. Происхождение, профилактика и тушение эндогенных пожаров в угольных шахтах. М.: Недра, 1977. 320 с.
2. Chanyshev A.I. A method to determine a body's thermal state // Journal of Mining Science. 2012. Vol. 48. Is. 4. P. 660-668.
3. Зыков В.С. О механизме формирования выбросоопасной ситуации в очистном забое угольной шахты // Маркшейдерский вестник. 2016. № 5. С. 44-48.
4. Черданцев Н.В. Об одном подходе к расчету выброса угля из газоносного пласта, вмещающего геологические нарушения // Безопасность труда в промышленности. 2019. № 8. С. 13-18.
5. Теплофизические и газодинамические условия протекания процессов дефлаграции и детонации в пылегазовоздушных потоках горных выработок вблизи очагов самонагревания / С.В. Черданцев, П.А. Шлапаков, Е.А. Шлапаков и др. // Химическая физика и мезоскопия. 2019. Т. 21. № 2. С. 179-189.
6. Формирование детонационного процесса при внезапном выбросе газа в горную выработку со сверхзвуковой скоростью / С.В. Черданцев, П.А. Шлапаков, К.С. Лебедев и др. // Горный информационно аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2019. № 7. С. 62-73.
7. Kurlenya M.V., Skritsky V.A. Methane Explosions and Causes of Their Origin in Highly Productive Sections of Coal Mines // Journal of Mining Science. 2017. Vol. 53. Is. 5. P. 861-867.
8. Нургалиев Е.И. Обоснование и разработка технологии изоляции пластовых выработок безврубовыми монолитными перемычками с одновременным возведением тампонажных завес: автореф. дисс. ... канд. техн. наук. Кемерово: ФГОУ «Кузбасский государственный технический университет им. Т.Ф. Горбачева», 2021. 22 с.
9. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высшая школа, 1975. 526 с.
10. Соляник-Красса К.В. Осесимметричная задача теории упругости. М.: Стройиздат, 1987. 336 с.
11. Kolsky Н. Stress waves in solids. Oxford, 1953. 192 p. 12. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
13. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 280 с.
14. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. М.: ИТ Пресс, 2006. 496 с.

Original Paper

UDC 622.272:516.02 © S.V. Cherdantsev, A.Yu. Erastov, 2023
 ISSN 0041-5790 (Print) • ISSN 2412-8333 (Online) • Ugol' – Russian Coal Journal, 2023, № 2, pp. 34-40
 DOI: <http://dx.doi.org/10.18796/0041-5790-2023-2-34-40>

Title
**MATHEMATICAL MODELING OF THE STRESS STATE IN THE SHAFT BRIDGE INSTALLED
 IN THE DEVELOPMENT OF A CIRCULAR CROSS-SECTION**

AuthorsCherdantsev S.V.¹, Erastov A.Yu.¹

¹ Join-stock company "Scientific centre VOSTNII on industrial and ecological safety in mountain industry" (JC "NC VOSTNII"),
 Kemerovo, 650002, Russian Federation

Authors Information

Cherdantsev S.V., Doctor of Engineering Sciences, Chief Researcher,
 e-mail: svch01@yandex.ru

Erastov A.Yu., Senior researcher e-mail: erastov_a_y@mail.ru

Abstract

In order to prevent the spread of thermophysical and gas-dynamic processes in the mine atmosphere of coal enterprises, mine bridges are used. To date, there is a wide variety of designs of mine bridges and technological schemes of their construction. At the same time, the available methods for calculating jumpers, in our opinion, do not meet modern requirements for ensuring the reliability of mine jumpers. In this article, an attempt is made to calculate shaft jumpers based on the fundamental provisions of the mechanics of a solid deformable body. In particular, an axisymmetric boundary value problem of elasticity theory is considered, during the solution of which formulas for determining the components of the stress state in a shaft concrete bridge are obtained, graphs of stress components are constructed and some regularities of their distribution in the bridge are revealed.

Keywords

Mining, Mine bridges, Stress state components, Generalized Hooke's law, Axisymmetric problem of elasticity theory, Hyperbolic functions and Bessel functions.

References

- Lindenau N.I., Mayevskaya V.M. & Krylov V.F. Origin, prevention and extinguishing of endogenous fires in coal mines. Moscow, Nedra Publ., 1977, 320 p. (In Russ.).
- Chanyshev A.I. A method to determine a body's thermal state. *Journal of Mining Science*, 2012, Vol. 48, (4), pp 660-668.
- Zykov V.S. On the mechanism of formation of an outlier situation in the treatment face of a coal mine. *Surveying Bulletin*, 2016, (5), pp. 44-48. (In Russ.).
- Cherdantsev N.V. On one approach to the calculation of coal emissions from a gas-bearing reservoir containing geological disturbances. *Occupational safety in industry*, 2019, (8), pp. 13-18. (In Russ.).
- Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Shlapakov E.A., Lebedev K.S. & Erastov A.Yu. Thermophysical and gas-dynamic conditions of deflagration and detonation processes in dust-gas-air flows of mine workings near the centers of self-heating. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya*, 2019, Vol. 21, (2), pp. 179-189. (In Russ.).
- Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Lebedev K.S. & Kolykhalov V.V. Formation of detonation process in case of sudden gas release into mining at supersonic

speed. *Gornyj informatsionno-analiticheskij byulleten*, 2019, (7), pp. 62-73. (In Russ.).

7. Kurlenya M.V. & Skritsky V.A. Methane Explosions and Causes of Their Origin in Highly Productive Sections of Coal Mines. *Journal of Mining Science*, 2017, Vol. 53, (5), pp 861-867.

8. Nurgaliev E.I. Substantiation and development of technology for isolation of reservoir workings by pipe-less monolithic lintels with simultaneous construction of grouting curtains. Phd Eng. abstract. diss. Kemerovo, FGOU "Kuzbass State Technical University named after T.F. Gorbachev", 2021, 22 p. (In Russ.).

9. Koltunov M.A., Vasiliev Yu.N. & Chernykh V.A. Elasticity and strength of cylindrical bodies. Moscow, Higher School Publ., 1975, 526 p. (In Russ.).

10. Solyanik-Krassa K.V. Axisymmetric problem of elasticity theory. Moscow, Stroyizdat Publ., 1987, 336 p. (In Russ.).

11. Kolsky H. Stress waves in solids. Oxford, 1953, 192 p.

12. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Partial differential equations of mathematical physics. Moscow, Higher School Publ., 1970, 712 p. (In Russ.).

13. Ilyin V.A. & Poznyak E.G. Linear algebra. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005, 280 p. (In Russ.).

14. Alekseev E.R. & Chesnokova O.V. Solving computational mathematics problems in Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. Moscow, NT Press Publ., 2006, 496 p. (In Russ.).

Acknowledgements

The research is conducted as part of the comprehensive scientific and technical program of a complete innovative cycle "Development and implementation of a complex of technologies in the fields of exploration and extraction of minerals, ensuring of industrial safety, bioremediation, creation of new products of deep processing of coal raw materials with consecutive amelioration of ecological impact on the environment and risks to human life", approved by the Decree of the Government of the Russian Federation from 11.05.2022 № 1144-r.

For citation

Cherdantsev S.V. & Erastov A.Yu. Mathematical modeling of the stress state in the shaft bridge installed in the development of a circular cross-section. *Ugol'*, 2023, (2), pp. 34-40. (In Russ.). DOI: 10.18796/0041-5790-2023-2-34-40.

Paper info

Received December 12, 2022

Reviewed December 25, 2022

Accepted January 26, 2023